Sommaire :
- l'ensemble des pts M(z).
- l'équation de type $z^n = a$
- travailler avec l'argument.
- linéarisation.

Q : Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que ... ?

$$E = \{ M(z) \in P \ / \ \dots \}$$

① sans module ② avec module

① Sans module : on pose $z = x + iy$, puis on met l'expression sous forme algébrique :

on a 2 cas :

* $ax + by + c = 0$: E = droite d'équation $ax + by + c = 0$

* $x^2 + \dots + y^2 + \dots = 0$: on la transforme en $(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 = R^2$, $E = \mathcal{C}(A(\alpha,\beta))$

Astuce : $x^2 \pm ax = \left(x \pm \frac{a}{2}\right)^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$

⚠ dénominateur $\neq 0$ donc privé d'un point

Complexe

exemple : $z' = \dfrac{z - 2i}{z + i} = \dfrac{(x+iy) - 2i}{x + iy + i} = \dfrac{x + (y-2)i}{x + (y+1)i}$

$$= \frac{(x + (y-2)i)(x - (y+1)i)}{(x + (y+1)i)(x - (y+1)i)}$$

$$z' = \frac{x^2 + y^2 - y - 2}{x^2 + (y+1)^2} + i \frac{-x}{x^2 + (y+1)^2}$$

déterminer $E = \{ M(z) \in P / \ z' \text{ est réel} \}$.

$F = \{ M(z) \in P / \ z' \text{ est imaginaire pur} \}$

* z' est réel $\Leftrightarrow$ $\mathrm{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow \dfrac{-x}{x^2 + (y+1)^2} = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

donc E = droite $\Delta : x = 0$ privé du point B(0, -1)

* z' est imaginaire pur $\Leftrightarrow \mathrm{Re}(z') = 0$

$$\begin{cases} \dfrac{x^2 + y^2 - y - 2}{x^2 + (y+1)^2} = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y - 2 = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2 = 0 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ x^2 + (y+1)^2 \neq 0 \end{cases}$$

$F = \mathcal{C}\left(I\left(0, \frac{1}{2}\right), \frac{3}{2}\right)$ privé du point B(0, -1)

② avec module : on transforme le module en distance $AM = |z - z_A|$

on a 3 cas :

+ $AM = R \Leftrightarrow E = \mathcal{C}_{(A,R)}$
+ $AM = BM \Leftrightarrow E = \text{méd}[AB]$
+ $AM = \alpha BM \Leftrightarrow E = \mathcal{C}_{[IJ]}$

avec I barycentre des points (A, 1) et (B, α)
J " " (A, 1) et (B, -α)

exemple :

$$E' = \{ M(z) \in P / \ |z'| = 1 \}$$

$$|z'| = 1 \Leftrightarrow \frac{|z - 2i|}{|z + i|} = 1$$

on pose $z_A = 2i$ et $z_B = -i$

donc $\dfrac{|z - z_A|}{|z - z_B|} = 1 \Leftrightarrow \dfrac{AM}{BM} = 1$

$\Leftrightarrow AM = BM \Leftrightarrow E' = \text{méd}[AB]$

B.M Taki Eddine
23 390 248

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn